Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas II (MA1112)
2do Examen Parcial (36 %)
Ene-Mar 2018

Turno 1-2
Duración: 1 hora 50 minutos

Respuestas

Pregunta 1. (4 ptos.) Halle el dominio de definición de la función $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-5}{x^2-x}\right)$

Solución: Como el dominio de la función logaritmo es $(0,\infty)$, queremos encontrar cuáles son los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que $\dfrac{x-5}{x(x-1)} > 0$. Haciendo el análisis de signos

	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,5)$	$(5,\infty)$
$x-5$	$-$	$-$	$-$	$+$
x	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$

tenemos que el dominio de la función $f(x)$ es $(0,1)\cup(5,\infty)$.

Pregunta 2. (8 ptos.) Halle $\displaystyle\int x\arctan(3x^2)\,\mathrm{d}x$

Solución: Integrando por partes se tiene,

$$f(x) = \arctan\big(3x^2\big) \qquad f'(x) = \frac{6x}{1+9x^4}$$

$$g'(x) = x \qquad g(x) = x^2/2$$

$$\begin{aligned}
\int x\arctan(3x^2)\,\mathrm{d}x &\overset{\downarrow}{=} \frac{x^2}{2}\arctan\big(3x^2\big) - \int \frac{x^2}{2}\,\frac{6x}{1+9x^4}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2}{2}\arctan\big(3x^2\big) - 3\int \frac{x^3}{1+9x^4}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2}{2}\arctan\big(3x^2\big) - \frac{1}{12}\int \frac{36\,x^3}{1+9x^4}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2}{2}\arctan\big(3x^2\big) - \frac{1}{12}\ln\big(1+9x^4\big) + C
\end{aligned}$$

para cualquier valor de $C \in \mathbb{R}$.

Pregunta 3. (8 ptos.) Halle $\displaystyle\int \operatorname{sen}^8(x)\cos^3(x)\,\mathrm{d}x$

Solución:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^8(x)\cos^3(x)\,\mathrm{d}x &= \int \operatorname{sen}^8(x)\cos^2(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int \operatorname{sen}^8(x)\left(1-\operatorname{sen}^2(x)\right)\cos(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int \left(\operatorname{sen}^8(x)-\operatorname{sen}^{10}(x)\right)\cos(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{9}\operatorname{sen}^9(x)-\frac{1}{11}\operatorname{sen}^{11}(x)+C
\end{aligned}$$

para cualquier valor de $C \in \mathbb{R}$.

Pregunta 4. (8 ptos.) Halle $\displaystyle\int \frac{3x^2+x-2}{x^3-x^2+x-1}\,\mathrm{d}x$

Solución:

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x^2+x-2}{x^3-x^2+x-1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{3x^2+x-2}{(x-1)\left(x^2+1\right)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \left(\frac{1}{x-1}+\frac{2x+3}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\mathrm{d}x}{x-1}+\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x+3\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} \\
&= \ln|x-1|+\ln\left|x^2+1\right|+3\arctan(x)+K
\end{aligned}$$

para cualquier valor de $K \in \mathbb{R}$, ya que

$$\frac{3x^2+x-2}{(x-1)\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

vale para todo $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ si, y sólo si, $A=1$, $B=2$ y $C=3$.

Pregunta 5. (8 ptos.) Halle $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+4x+6\right)^{3/2}}$

Solución:

$$\begin{aligned} x+2 &= \sqrt{2}\tan(t) \\ \mathrm{d}x &= \sqrt{2}\sec^2(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+4x+6\right)^{3/2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left((x+2)^2+2\right)^{3/2}} \overset{\downarrow}{=} \int \frac{\sqrt{2}\sec^2(t)}{\Big(2\big(\tan^2(t)+1\big)\Big)^{3/2}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(t) + C = \frac{1}{2}\,\frac{\tan(t)}{\sec(t)} + C$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\tan(t)}{\sqrt{\tan^2(t)+1}} + C = \frac{1}{2}\,\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+6}} + C$$

para cualquier valor de $C \in \mathbb{R}$.